

BÁO CÁO SINH HOẠT CỤM TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN Tháng 3 /2012

A. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương pháp thế:

Trong phương pháp này, từ một phương trình hoặc kết hợp hai phương trình của hệ ta biểu diễn được một ẩn qua ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ. Từ đó đưa về giải phương trình một ẩn.

Dạng 1. Trong hệ có một phương trình bậc nhất với ẩn x(hoặc y), khi đó ta tìm cách rút y theo x(hoặc x theo y).

* **Thí dụ 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1(1) \\ xy + x + 1 = x^2(2) \end{cases}$$

Lời giải: Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn PT(2). Với $x \neq 0$ từ (2) có $y + 1 = \frac{x^2 - 1}{x}$, thay

vào (1) ta được

$$\begin{aligned} x^2 \frac{x^2 - 1}{x} \left(x + \frac{x^2 - 1}{x} \right) &= 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow (x^2 - 1)(2x^2 - 1) = (x - 1)(3x - 1) \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - x - 1) = (x - 1)(3x - 1) \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 1)^2(x + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2 \text{ (do } x \neq 0).$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ thì } y = -1; \text{ với } x = -2 \text{ thì } y = -\frac{5}{2}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; -1), (-2; -\frac{5}{2})$.

$$\text{*Thí dụ 2. Giải hệ phương trình } \begin{cases} \log_2(2x + y)^2 + \log_{\sqrt{\frac{1}{2}}}(3x - 2y) = 0(1) \\ 4x^2 - 3y^2 = 16(2) \end{cases}$$

Lời giải: ĐDK $3x - 2y > 0$ và $2x + y \neq 0$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_2 |2x + y| = \log_2(3x - 2y) \Leftrightarrow |2x + y| = 3x - 2y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y = 5x \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 3y \text{ thay vào (2) ta được } 33y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm \frac{4\sqrt{33}}{33} \text{ suy ra } x = \pm \frac{4\sqrt{33}}{11}$$

Với $y = 5x$ thay vào (2) ta thấy phương trình vô nghiệm

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x; y) = \left(\frac{4\sqrt{33}}{11}; \frac{4\sqrt{33}}{33} \right)$

***Thí dụ 3** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases} \quad (x, y \in R)$$

Lời giải: ĐK: $x + y \geq 0, x - y \geq 0, y \geq 0$

$$\text{Pt (1)} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 2y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \geq 0; (3) \\ 5y^2 = 4xy; (4) \end{cases}$$

Từ pt (4) $\Leftrightarrow y = 0 \vee 5y = 4x$

Với $y = 0$ thế vào pt (2) ta có $x = 9$ (không thỏa mãn đk (3))

Với $5y = 4x$ thế vào pt (2) ta có $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$

KL: Hệ phương trình có 1 nghiệm $(x; y) = \left(1; \frac{4}{5} \right)$

*** Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x \end{cases}$$

Lời giải : Nếu $2y^2 - x^2 = 1$ thì

$$2y - x = (2y^2 - x^2)(2y - x) = 4y^3 - 2y^2x - 2yx^2 + x^3$$

Phương trình thứ hai có thể viết lại thành :

$$x^3 + 2x^2y + 2xy^2 - 5y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + 3xy + 5y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

Thế $y = x$ trở lại hệ đã cho ta được :
$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

ĐS: $x = y = 1, x = y = -1$

*** Thí dụ 4.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 4xy \\ x^2y^2 = 9 \end{cases}$$

Lời giải: Ta có : $x^2y^2 = 9 \Leftrightarrow xy = \pm 3$

+ Khi : $xy = 3$, ta có : $x^3 - y^3 = 4$ và $x^3.(-y^3) = -27$

Suy ra : $x^3; (-y^3)$ là nghiệm PT : $X^2 - 4X - 27 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{31}$

Vậy nghiệm của PT là $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{31}}, y = -\sqrt[3]{2 - \sqrt{31}}$

Hay $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{31}}, y = -\sqrt[3]{2 + \sqrt{31}}$

+ Khi : $xy = -3$, ta có : $x^3 - y^3 = -4$ và $x^3.(-y^3) = 27$

Suy ra : $x^3; (-y^3)$ là nghiệm PT $X^2 + 4X + 27 = 0$ (PTVN)

Dạng 2. Một phương trình trong hệ có thể đưa về dạng tích của các phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó tìm cách rút một ẩn theo ẩn còn lại.

***Thí dụ 6.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y (2) \end{cases}$$

Lời giải: ĐK $x \geq 1; y \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} \text{PT(1)} &\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 - (x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \quad (\text{từ điều kiện ta có } x + y > 0) \Leftrightarrow x = 2y + 1 \end{aligned}$$

Thay vào PT (2) và biến đổi ta được $(y + 1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ (do $y \geq 0$)

Từ đó tìm được $x = 5$.

Vậy hệ có một nghiệm duy nhất $(5; 2)$.

***Thí dụ 7.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{y^2 + 1}{y} = \frac{x^2 + 1}{x} (1) \\ x^2 + 3y^2 = 4 (2) \end{cases}$$

Lời giải: ĐK $xy \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x(y^2 + 1) = y(x^2 + 1) \Leftrightarrow x - y + xy^2 - x^2y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(1 - xy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x = y$ thay vào PT(2) ta được $4x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Do đó $y = \pm 1$

Với $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ thay vào PT(2) ta được

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1), (-1; -1), \left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

***Thí dụ 8.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

Lời giải:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - y) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{y}\right) \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = -\frac{4(x-y)}{xy} \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -2 \\ 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + \frac{1}{x} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \\ x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{x} \\ 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{x} \end{cases}$$

*** Thí dụ 9.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \end{cases}$$

Lời giải: ĐK:
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x - y - (y + \sqrt{xy}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0, (\text{vô lý}) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{y}$$

$\Leftrightarrow x = 4y$. Thay vào (2) ta có :

$$\sqrt{4y-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4y-1} = \sqrt{2y-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 4y-1 = 2y-1 + 2\sqrt{2y-1} + 1 \Leftrightarrow 2y-1 = 2\sqrt{2y-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt{2y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} (tm) \\ y = \frac{5}{2} (tm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 10 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x;y) = (2; 1/2)$ và $(x;y) = (10; 5/2)$

*** Thí dụ 10.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Lời giải:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1; (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y; (2) \end{cases}, (dk : x+y > 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy - (x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)((x+y)^2 - 1) - 2xy(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)[(x+y)(x+y+1) - 2xy] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1; (3) \\ x^2+y^2+x+y=0; (4) \end{cases}$$

Dễ thấy (4) vô nghiệm vì $x+y > 0$

Thế (3) vào (2) ta được $x^2 - y = 1$

Giải hệ
$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1; y=0 \\ x=-2; y=3 \end{cases} \dots\dots\dots$$

*** Thí dụ 11.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x-3y-2\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-5}+\sqrt{5y-1}=4 \end{cases}$$

Lời giải:
$$\begin{cases} x-3y-2\sqrt{xy}=0; (1) \\ \sqrt{x-5}+\sqrt{5y-1}=4; (2) \end{cases}$$

$DK : x \geq 5, y \geq 1/5$

$$(1) \Leftrightarrow (x-y) - 2\sqrt{y}(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} + \sqrt{x})(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow x = 9y$$

Thay $x = 9y$ vào (2) ta được :

$$\sqrt{9y-5} + \sqrt{5y-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(9y-5)(5y-1)} = 11-7y$$

Giải ra được : $y = 1$ hoặc $y = 29$ (loại).

Kết luận: Nghiệm của hệ : $(x; y) = (9; 1)$

Dạng 3. Một phương trình của hệ là phương trình bậc hai theo một ẩn, chẳng hạn đó là ẩn y . Lúc đó ta xem x là tham số và biểu diễn được y qua x bằng cách giải phương trình bậc hai ẩn y .

***Thí dụ 12.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Lời}$$

giải: Biến đổi PT(2) về dạng $y^2 - (4x+8)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0$

Coi PT(2) là PT bậc hai ẩn y(tham số x) ta có $\Delta' = 9x^2$, từ đó $\begin{cases} y = 5x+4 \\ y = 4-x \end{cases}$

* Với $y = 5x+4$, thay vào (1) được

$$(5x+4)^2 = (5x+4)(4-x) \Leftrightarrow 6x(5x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

* Với $y = 4-x$, thay vào (1) được

$$(4-x)^2 = (5x+4)(4-x) \Leftrightarrow 6x(4-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm (x; y) là $(0;4), (4;0), \left(-\frac{4}{5};0\right)$

*** Thí dụ 13.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + x - y + y^2 = 4 \\ x(x-y+1) + y(y-1) = 2 \end{cases}$

Lời giải : Trừ theo về hai phương trình đã cho ta suy ra $xy = 2$. Biến đổi tương đương phương trình đầu của hệ

$$x^2 + x - y + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-y) + 2xy - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ x-y = -1 \end{cases}$$

+) Với $x-y = 0$ kết hợp với $xy = 2$, ta được hai nghiệm $x = y = \pm\sqrt{2}$

+) Với $x-y = -1$ ta có hệ

$$\begin{cases} x + (-y) = -1 \\ x(-y) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x; (-y)$$

Là các nghiệm của phương trình $t^2 + t - 2 = 0$; do đó $x = 1$; $(-y) = -2$ hoặc $x = -2$; $(-y) =$

1.

ĐS:

$$(x = \sqrt{2}; y = \sqrt{2}); (x = -\sqrt{2}; y = -\sqrt{2});$$

$$(x = 1; y = 2); (x = -2; y = -1)$$

Dạng 4. Phương trình của hệ là phương trình mũ hoặc logarit, ta dùng phương pháp mũ hóa hoặc logarit hóa để rút một ẩn theo ẩn kia.

***Thí dụ 14.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 3^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$$

Lời giải: Logarit cơ số 2 cả hai PT trong hệ, ta được

$$\begin{cases} x + y \log_2 3 = 2 + \log_2 3 \\ x \log_2 3 + y = 1 + 2 \log_2 3 \end{cases}$$

Đây là phương trình bậc nhất hai ẩn. Giải tìm được $(x; y) = (2; 1)$

***Thí dụ 15.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1(1) \\ 3 \log_9 (9x^2) - \log_3 y^3 = 3(2) \end{cases}$$

Lời giải: ĐK $x \geq 1, 0 < y \leq 2$

$$(2) \Leftrightarrow 3(1 + \log_3 x) - 3 \log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y$$

Thay $y = x$ vào (1) dẫn đến $(x-1)(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$

Với $x = 1$ thì $y = 1$; với $x = 2$ thì $y = 2$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1), (2; 2)$

II. Phương pháp đặt ẩn phụ :

Điểm quan trọng trong việc giải hệ PT là phát hiện ẩn phụ $u = f(x, y); v = g(x, y)$

Có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một số phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0 để đưa hệ về dạng đơn giản hơn.

***Thí dụ 16.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y(1) \\ (x^2 + 1)(y+x-2) = y(2) \end{cases}$$

Lời giải: Ta thấy $y = 0$ không thỏa mãn PT(1). Xét $y \neq 0$, chia hai vế của (1) và (2) cho y ta được:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + y + x = 4 \\ \left(\frac{x^2 + 1}{y} \right) (y + x - 2) = 1 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x^2 + 1}{y}$ và $v = y + x - 2$ ta có
$$\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases}$$

Giải hệ được $u = v = 1$, từ đó ta có
$$\begin{cases} x^2 + 1 = y(3) \\ x + y = 3(4) \end{cases}$$

Thay (3) vào (4) ta có

$$x + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với $x = 1$ thì $y = 1^2 + 1 = 2$. Với $x = -2$ thì $y = (-2)^2 + 1 = 5$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2), (-2; 5)$.

***Thí dụ 17.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

Lời giải: ĐK $x + y \neq 0$. Khi đó biến đổi hệ đã cho thành dạng

$$\begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

Đặt $u = x + y + \frac{1}{x+y}$ ($|u| \geq 2$); $v = x - y$ ta được hệ PT
$$\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

Giải hệ PT này ta được $u = 2, v = 1$ (do $|u| \geq 2$), từ đó ta có hệ PT

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)$ là $(1; 0)$

***Thí dụ 18.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5\log_2 x - 3\log_4 y = -8 \\ 10\log_2 x^2 - \log_4 y = -10 \end{cases}$$

Lời giải: Đặt $u = \log_2 x, v = \log_4 y$, ta có hệ phương trình

Do đó
$$\begin{cases} \log_2 x = \frac{-2}{5} \\ \log_4 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{-2}{5}} \\ y = 16 \end{cases}$$
. Vậy HPT có nghiệm là $(2^{\frac{-2}{5}}; 16)$

***Thí dụ 19.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$$

Lời giải: ĐK: $y \neq 0$

Hệ
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} - 2 = 0 \\ \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y} - x - 2 = 0 \end{cases}$$
 đưa hệ về dạng
$$\begin{cases} 2u^2 + u - v - 2 = 0 \\ 2v^2 + v - u - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 1 - v \\ 2v^2 + v - u - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 1 \\ u = v = -1 \\ \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ v = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \\ v = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \end{array} \right\} \end{cases}$$

Từ đó ta có nghiệm

của hệ

$$(-1; -1), (1; 1), \left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2}; \frac{2}{\sqrt{7} - 1} \right), \left(\frac{3 + \sqrt{7}}{2}; \frac{2}{\sqrt{7} + 1} \right)$$

*** Thí dụ 20.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} = 6 \end{cases}$$

Lời giải : ĐK: $x \geq -1, y \geq 1$

Cộng vế theo vế rồi trừ vế theo vế ta có hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{y-1} + \sqrt{y+4} = 10 \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} + \sqrt{y+4} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6}, v = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+4}$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ \frac{5}{u} + \frac{5}{v} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ.}$$

*** Thí dụ 21.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$$

Lời giải: Dễ thấy $y \neq 0$, ta có :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{x^2 + 1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x^2 + 1}{y}, v = x + y$ ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3, u = 1 \\ v = -5, u = 9 \end{cases}$$

+) Với $v = 3, u = 1$ ta có hệ :

$$\begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = y \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = -2, y = 5 \end{cases}$$

+) Với $v = -5, u = 9$ ta có hệ :

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ y = -5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 46 = 0 \\ y = -5 - x \end{cases}, \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm : $(x; y) = \{(1; 2), (-2; 5)\}$

*** Thí dụ 22.** Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$$

Lời giải: * Biến đổi hệ tương đương với
$$\begin{cases} (x^2 - xy)^2 = 1 - x^3y \\ x^3y - (x^2 - xy) = -1 \end{cases}$$

*Đặt ẩn phụ $\begin{cases} x^2 - xy = u \\ x^3y = v \end{cases}$, ta được hệ
$$\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v - u = -1 \end{cases}$$

*Giải hệ trên được nghiệm $(u; v)$ là $(1; 0)$ và $(-2; -3)$

* Từ đó giải được nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$ và $(-1; 0)$

III. Phương pháp hàm số

Dạng 1. Một phương trình trong hệ có dạng $f(x) = f(y)$, phương trình còn lại giúp ta giới hạn được x, y để trên đó hàm số f đơn điệu. Từ đó suy ra $x = y$

***Thí dụ 23.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y(1) \\ x^8 + y^4 = 1(2) \end{cases}$$

Lời giải: Từ PT(2) ta có $x^8 \leq 1, y^4 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1, |y| \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 5t$ trên đoạn $[-1; 1]$, ta có $f'(t) = 3t^2 - 5 < 0, \forall t \in [-1; 1]$

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$, nên từ PT(1) suy ra $x = y$. Thay vào PT(2)

ta được $x^8 + x^4 - 1 = 0$.

Đặt $u = x^4 \geq 0$ và giải PT $u^2 + u - 1 = 0$ tương ứng ta được

$$u = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = x = \pm \sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}; \sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right) \text{ và } \left(-\sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}; -\sqrt[4]{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \right)$$

Dạng 2. Hệ đối xứng loại hai mà khi giải thường dẫn đến một trong hai chương trình của hệ có dạng $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = f(y)$ trong đó f là hàm đơn điệu.

***Thí dụ 24.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$$

Lời giải: Đặt $a = x - 1, b = y - 1$ ta được hệ

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^b & (1) \\ b + \sqrt{b^2 + 1} = 3^a & (2) \end{cases}$$

Từ theo về hai PT trên, ta được $a + \sqrt{a^2 + 1} + 3^a = b + \sqrt{b^2 + 1} + 3^b$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$, có $f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln 3$

Vì $\sqrt{t^2 + 1} > \sqrt{t^2} \geq -t \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1} + t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t$, do đó hàm số $f(t)$

đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó PT(3) có dạng $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$, thay vào PT(1) ta

được $a + \sqrt{a^2 + 1} = 3^a$ (4)

Theo nhận xét trên thì $a + \sqrt{a^2 + 1} > 0$ nên PT(4) $\Leftrightarrow \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) - a \ln 3 = 0$

Xét hàm số $g(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) - a \ln 3$ có

$$g'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \ln 3 < \frac{1}{1} - \ln 3 < 0, \forall a \in \mathbb{R},$$

Nên hàm số $g(a)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và do PT(4) có nghiệm $a = 0$ nên PT(4) có nghiệm duy nhất $a = 0$. Từ đó ta được nghiệm của hệ ban đầu là $(x; y) = (1; 1)$

IV. Phương pháp đánh giá

Với phương trình này, cần lưu ý phát biểu các biểu thức không âm trong hệ và nắm vững cách vận dụng các bất đẳng thức cơ bản như BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky. Thông thường phương pháp này cho ta cách giải ngắn gọn.

***Thí dụ 25.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$$

Lời giải: Cộng theo về hai PT của hệ ta được

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = x^2 + y^2 \quad (1)$$

Ta có

$$\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2 \Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2|xy|}{2} = |xy|$$

Tương tự $\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} \leq |xy|$, mà theo BĐT Cauchy ta có $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ nên

VT (1) $\leq$ VP (1). Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 0 \end{cases}$

Thử lại ta được nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(0; 0), (1; 1)$

***Thí dụ 26.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} y - 2 = -(x+1)^2(x-2) & (1) \\ x - 2 = 2(y+1)^2(y-2) & (2) \end{cases}$

Nếu $x > 2$ thì $x - 2 > 0$, từ (1) suy ra $y - 2 < 0$, điều này mâu thuẫn với PT(2) có $x - 2$ và $y - 2$ cùng dấu.

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (2; 2)$

***Thí dụ 27.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 2y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} = 4 \end{cases}$

Lời giải: ĐK $xy \geq 0; x \geq -\frac{1}{3}; y \geq -\frac{1}{3}$

Từ $2x + 2y - \sqrt{xy} = 3 \Rightarrow x + y > 0 \Rightarrow x, y \geq 0$ (do $xy \geq 0$). Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4x + 4y - 2\sqrt{xy} = 6 \\ 4\sqrt{3x+1} + 4\sqrt{3y+1} = 16 \end{cases} \Rightarrow 4x + 4y - 2\sqrt{xy} - 4\sqrt{3x+1} - 4\sqrt{3y+1} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1-4\sqrt{3x+1}+4) + (3y+1-4\sqrt{3y+1}+4) + (x-2\sqrt{xy}+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-2)^2 + (\sqrt{3y+1}-2)^2 + (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = \sqrt{3y+1} = 2 \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ $(x; y) = (1; 1)$

***Thí dụ 28.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{1-y} = \sqrt{y} & (1) \\ 2\sqrt{xy-y} - \sqrt{y} = -1 & (2) \end{cases}$

Lời giải: ĐK $0 \leq y \leq 1, x \geq 0, xy - y \geq 0 (*)$

Ta thấy $y = 0$ không phải là nghiệm của hệ. Với $y \neq 0$, từ (*) ta suy ra $x \geq 1$. Khi đó

$$\sqrt{xy} + \sqrt{1-y} \geq \sqrt{y}. \text{ Do đó, (1) } \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}. \text{ Thay cặp } (x; y) = (1; 1) \text{ này vào hệ ta}$$

thấy thỏa mãn hệ. Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 1)$

V.Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình

*** Thí dụ 29 :** Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5m \\ 2y = x^2 - 4x + 5m \end{cases}$$

a/ Giải hệ với $m = 9/5$

b/ Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải : a/ Nếu $m = 9/5$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 9 \\ 2y = x^2 - 4x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = y^2 - x^2 - 4(y-x) \\ 2y = x^2 - 4x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-2) = 0 \\ 2y = x^2 - 4x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = 2-x \\ x^2 - 2x + 5 = 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $y = x = 3$.

b/ Nếu $x = \alpha, y = \beta$ là nghiệm của hệ thì $x = \beta, y = \alpha$ cũng là nghiệm của hệ nên nếu hệ có nghiệm duy nhất thì phải có $x = \alpha, y = \beta$, trong đó α là nghiệm duy nhất của phương trình :

$$2x = x^2 - 4x + 5m \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5m = 0$$

$$\text{Vì vậy phải có } \Delta' = 9 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{5}$$

Đảo lại : Nếu $m = 9/5$ thì theo a/ ta thấy hệ có nghiệm duy nhất .

ĐS: $m = 9/5$

*** Thí dụ 30.** Tìm m để hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm thực.}$$

Lời giải: ĐK: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2y-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

$$\text{Đặt } t = x + 1 \Rightarrow t \in [0; 2]; \text{ ta có (1) } \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2$$

Hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ nghịch biến trên đoạn $[0; 2]$ nên :

$$(1) \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + m = 0$$

$$\text{Đặt } v = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow v \in [0; 1] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$$

Hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ đạt $\min_{[0;1]} g(v) = -1$; $\max_{[0;1]} g(v) = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 2$

*** Thí dụ 31.** Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$$

Lời giải: ĐK: $x \geq -1$; $y \geq 1$

Hệ PT

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ (\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{y-1})^2 = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}[a^2 - (2a + 1)] \end{cases}$$

Vậy $\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{y-1}$ là nghiệm của phương trình :

$$T^2 - aT + \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) = 0 \quad *$$

Rõ ràng hệ trên có nghiệm khi pt * có 2 nghiệm không âm

BÀI TẬP

Bài 1 : Giải các hệ phương trình sau:

1/. $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$

2/. $\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x - 3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$

3/. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$ 4/. $\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$ ĐS:

$$\left(1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 1\right)$$

5/. $\begin{cases} (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x^2} = 49 \end{cases}$ ĐS: $\left(\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}, -1\right); \left(-1, \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right)$

$$6/ \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases} \quad \text{ĐS:} \quad \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 0 \right); \left(\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, -4 \right)$$

$$7/ \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \quad 8/$$

$$\begin{cases} 17x^2 - 34y - 4x^3 y + 8xy^2 + xy = 4 \\ x^4 + 4y^2 + xy - 4x^2 y = 4 \end{cases}$$

$$9/ \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$$

$$10/ \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2 y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

$$11/ \begin{cases} x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

$$12/ \begin{cases} xy(2x + y - 6) + 2x + y = 0 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^2 = 8 \end{cases}$$

$$13/ \begin{cases} (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 5 \\ xy + \frac{1}{xy} = 4 \end{cases}$$

$$14/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+5} = 6 \end{cases}$$

$$15/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+5} = 8 \end{cases}$$

$$16/ \begin{cases} (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 4 \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 4 \end{cases}$$

$$17/ \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = \frac{2}{3} \\ (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 6 \end{cases}$$

$$18/ \begin{cases} (x+y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 6 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy} \right)^2 = 18 \end{cases}$$

$$19/ \begin{cases} x(x+1) + \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} + 1 \right) = 4 \\ x^3 y^3 + xy + x^2 y^2 + 1 = 4y^3 \end{cases}$$

$$20/ \begin{cases} (x+2y)^2 + \frac{1}{(2x-y)^2} = 10 \\ \frac{x+2y}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

$$21/ \begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x+y + \frac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

$$22/ \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases}$$

$$23/ \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=6 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2=18 \end{cases}$$

$$24/ \begin{cases} 2x^2y^2+x^2+2x=2 \\ 2x^2y-x^2y^2+2xy=1 \end{cases}$$

25/

$$\begin{cases} y^2=(5x+4)(4-x) \\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0 \end{cases}$$

$$26/ \begin{cases} y^2=(x+8)(x^2+2) \\ y^2-(4x+8)y+16+16x-5x^2=0 \end{cases}$$

$$27/ \begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$$

28/

$$\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\frac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\frac{1}{x+y}=3 \end{cases}$$

$$29/ \begin{cases} \sqrt{3+x^2}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} \\ \sqrt{3+y^2}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x} \end{cases}$$

$$30/ \begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^3+3x^2+6y-12x+13=0 \end{cases}$$

$$31/ \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-7}=4 \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-7}=4 \end{cases}$$

$$32/ \begin{cases} \sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}=4 \\ \sqrt{y+9}+\sqrt{x-7}=4 \end{cases}$$

$$33/ \begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases}$$

$$34/ \begin{cases} (4x+2)^2=2y+15 \\ (4y+2)^2=2x+15 \end{cases}$$

$$35/ \begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 8xy^3+2y^3+1\geq 4x^2+2\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$$

$$36/ \begin{cases} x+y+(z^2-8z+14)\sqrt{x+y-2}=1 \\ 2x+5y+\sqrt{xy+z}=3 \end{cases}$$

$$37/ \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y \\ x^4 - y^4 = 144 \end{cases}$$

$$38/ \begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1(1) \\ xy + x + 1 = x^2(2) \end{cases}$$

$$39/ \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2(1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y(2) \end{cases} \quad 40/ \begin{cases} \frac{y^2+1}{y} = \frac{x^2+1}{x}(1) \\ x^2 + 3y^2 = 4(2) \end{cases}$$

$$41/ \begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x)(1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0(2) \end{cases}$$

$$42/ \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y(1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y(2) \end{cases} \quad 43/ \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

$$44/ \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad 45/ \begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y(1) \\ x^8 + y^4 = 1(2) \end{cases}$$

$$46/ \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases} \quad 47/ \begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$$

$$48/ \begin{cases} 2x + 2y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} = 4 \end{cases}$$

Bài 2: 1/ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{y-1} = m \\ 2y - \sqrt{x-1} = m \end{cases}$$

2/ Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+2} = m \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y} = m \end{cases}$$

B. MỘT SỐ KỸ NĂNG ĐẶT ẨN PHỤ TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Trong nhiều trường hợp giải phương trình vô tỉ mà ta biến đổi tương đương sẽ dẫn đến một phương trình phức tạp, có thể bậc quá cao, ... Có lẽ phương pháp đặt ẩn phụ là phổ biến và hữu hiệu nhất để chuyển về một phương trình đơn giản và dễ giải quyết hơn.

Điều quan trọng trong phương pháp đặt ẩn phụ là nhận ra cách đặt ẩn phụ như thế nào cho phù hợp và điều kiện của ẩn phụ là phần không thể thiếu - Đây là mấu chốt của vấn đề cần suy nghĩ, định hướng sao cho đúng thì bài toán mới được giải quyết nhanh gọn.

Một số phương pháp đặt ẩn phụ mà chúng tôi muốn nêu trong tham luận lần này là:

- + Phương pháp lượng giác hóa.
- + Phương pháp dùng ẩn phụ không triệt để.
- + Phương pháp dùng ẩn phụ đưa về dạng tích.
- + Phương pháp dùng ẩn phụ đưa về hệ.

I/ Phương pháp lượng giác hóa.

1/ Nếu $|x| \leq a$ thì ta có thể nghĩ đến đặt $x = a \cdot \sin t$, với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = a \cdot \cos t$ với $t \in [0; \pi]$.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2})$

Gợi ý lời giải: ĐK: $|x| \leq 1$. Đặt: $x = \sin t$, với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Pt trở thành:

$$\sqrt{1 + \cos t} = \sin t(1 + 2\cos t) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos \frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{t}{2} \left(\sqrt{2} \sin \frac{3t}{2} - 1 \right) = 0$$

Giải ra và kết hợp điều kiện ta được: $t = \frac{\pi}{6}$. Suy ra: $x = 1/2$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{1 - 2x} + \sqrt{1 + 2x} = \sqrt{\frac{1 - 2x}{1 + 2x}} + \sqrt{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}}$

Gợi ý lời giải: ĐK: $|x| \leq \frac{1}{2}$. Đặt: $2x = \cos t$ với $t \in (0; \pi)$. Pt trở thành:

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) = \tan \frac{t}{2} + \cot \frac{t}{2}$$

ĐS: $x = 0$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}$ (1)

Gợi ý lời giải: ĐK: $x \geq -2$

Chú ý: $x > 2$, ta có: $x^3 - 3x = x + x(x^2 - 4x) > x > \sqrt{x+2}$. Do đó để giải pt (1) ta chỉ cần xét

$x \in [-2; 2]$. Đặt: $x = 2\cos t$ với $t \in [0; \pi]$. Pt trở thành: $\cos 3t = \cos \frac{t}{2}$.

2/ Nếu $|x| \geq a$ thì ta có thể nghĩ đến đặt $x = \frac{a}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], t \neq 0$ hoặc

$$x = \frac{a}{\cos t}, t \in [0; \pi], t \neq \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2(1 - \sqrt{x^2 - 1}) = 1$

Gợi ý lời giải: ĐK: $|x| > 1$. Đặt: $x = \frac{1}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], t \neq 0$. Pt trở thành:

$$\frac{1}{\sin^2 t}(1 - |\cot t|) = 1 \Leftrightarrow |\cot t| = \cos^2 t. \text{ Xét hai trường hợp để giải.}$$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}} = 6\sqrt{2}$

Gợi ý lời giải: ĐK: $|x| > 3$. Đặt: $x = \frac{3}{\cos t}, t \in (0; \pi), t \neq \frac{\pi}{2}$. Pt trở thành:

$$3\left(\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\cos t \cdot |\tan t|}\right) = 6\sqrt{2}. \text{ Xét hai trường hợp để giải.}$$

3/ Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, để đưa về phương trình lượng giác đơn giản hơn.

Ví dụ 6: Giải phương trình: $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$ (1)

Gợi ý lời giải: (1) $\Leftrightarrow \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \sqrt{3}$. Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), t \neq \pm \frac{\pi}{6}$, ta được phương trình: $\tan 3t = \sqrt{3}$. Giải ra đối chiếu điều kiện.

Ví dụ 7: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{(x^2 + 1)^2}{2x(1 - x^2)}$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \neq 0, x \neq 1$ và $x \neq -1$. Đặt $x = \tan t$,

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), t \neq \pm \frac{\pi}{4}, t \neq 0.$$

Ta được phương trình: $\frac{1}{|\cos t|} + \frac{1}{\sin 2t} = \frac{1}{\sin 2t \cdot \cos 2t}$. Giải ra đối chiếu điều kiện.

II/ Phương pháp dùng ẩn phụ không triệt để.

Đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai đối với ẩn phụ, hoặc đối với biến đã cho. Tìm quan hệ giữa ẩn phụ và ẩn đã cho theo một hệ thức đơn giản hơn.

Ví dụ 8: Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $|x| \leq 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow 8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} = x^2 - 8x$

Đặt: $t = \sqrt{2(4-x^2)}, t \geq 0$. Ta được phương trình: $4t^2 + 16t - x^2 - 8x = 0$. Giải phương trình này theo biến t ta được: $t = x/2$ hoặc $t = -4 - x/2$ (loại). Giải tiếp phương trình $t = x/2$.

Ví dụ 9: Giải phương trình: $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt: $t = \sqrt{x+1} \geq 0$. Phương trình trở thành:

$$x.t^2 + 12t - 36 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm 6t}{x} \quad (\text{vì } x = 0 \text{ không thỏa (1)})$$

* Với $t = \frac{-6+6t}{x}$, ta có: $6 = (6-x)t \Rightarrow x = 3$ hoặc $x = 8$ (loại) hoặc $x = 0$ (loại).

* Với $t = \frac{-6-6t}{x}$ (ptvn)

Ví dụ 10: Giải phương trình: $3(\sqrt{2x^2+1}-1) = x(1+3x+8\sqrt{2x^2+1})$ (1)

Gợi ý lời giải: $(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2+1}-3 = x+3x^2+8x\sqrt{2x^2+1}$
 $\Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2+1}-3 = x+3(2x^2+1)+8x\sqrt{2x^2+1}-3x^2-3$

Đặt: $t = \sqrt{2x^2+1} \geq 1$, ta được phương trình: $3t^2 + (8x-3)t + x - 3x^2 = 0$.

Giải ra: $t = x/3$ hoặc $t = 1 - 3x$.

Ví dụ 11: Giải phương trình: $2008x^2 - 4x + 3 = 2007x\sqrt{4x-3}$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq \frac{3}{4}$. Đặt: $t = \sqrt{4x-3} \geq 0$, ta được:

$$2008x^2 - 2007t.x - t^2 = 0. \text{ Giải ra: } x = t \text{ hoặc } x = -\frac{t}{2008}$$

Ví dụ 12: Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3 + 2x + 1$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt: $t = \sqrt{x^3+1} \geq 0$, ta được: $2t^2 - (4x-1)t + 2x-1 = 0$

III/ Phương pháp dùng ẩn phụ để đưa về dạng tích:

1/ Đặt một ẩn phụ:

Ví dụ 13: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x + \frac{3}{2}} = \frac{9}{4}$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2}$. Đặt: $t = \sqrt{x + \frac{3}{2}} \geq 0$, ta được:

$$t^4 - 3t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t^3 - 3t + 1 = 0 \quad (2)$$

Giải (2): Đặt $t = 2\cos u$, với $u \in [0; \pi]$, ta được $\cos 3u = -1/2$

Ví dụ 14: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} = 6x \quad (1)$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq -2$. Đặt: $t = \sqrt{x+2} \geq 0$, ta được:

$$x^3 - 3xt^2 + 2t^3 = 0 \Leftrightarrow (x-t)^2 \cdot (x+2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 15: Giải phương trình: $x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $1 \leq x \leq 6 - \sqrt{5}$. Đặt: $t = \sqrt{x-1} \geq 0$, ta được:

$$t^2 + \sqrt{5+t} = 5 \Leftrightarrow t^4 - 10t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + t - 4)(t^2 - t - 5) = 0$$

Ví dụ 16: Giải phương trình: $\sqrt{10x^2 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 + x + 2} = 3x - 1 \quad (1)$

Gợi ý lời giải: Nhận xét

$$\left(\sqrt{10x^2 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 + x + 2}\right)\left(\sqrt{10x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 2}\right) = (3x - 1)^2$$

Do đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (3x - 1)\left(\sqrt{10x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 2}\right) = (3x - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ \sqrt{10x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 2} = 3x - 1 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Lấy (1) + (2): $\sqrt{10x^2 - 5x + 3} = 3x - 1$ (PTVN)

Kết luận: $x = 1/3$

2/ Đặt hai ẩn phụ:

Ví dụ 17: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$

Gợi ý lời giải: Nhận xét $\left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1}\right)^2 - \left(2\sqrt{x^2 - x + 1}\right)^2 = 9x - 3$

Đặt: $u = \sqrt{4x^2 + 5x + 1}$, $v = 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$. Ta được:

$$u^2 - v^2 = u - v \Leftrightarrow u = v \text{ hoặc } u = 1 - v$$

Ví dụ 18: Giải phương trình: $2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

Nhận xét:

$$\sqrt{x^3+8} = \sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} \& (x^2-2x+4) - (x+2) = x^2-3x+2$$

Đặt: $u = \sqrt{x^2-x+4}, v = \sqrt{x+2}$. Ta được: $2(u^2-v^2) = 3uv \Leftrightarrow (2u+v)(u-2v) = 0$

Ví dụ 19: Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq 5$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(5x+9)} = \sqrt{(x+4)(x-5)} + 5\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-4x-5) + 3(x+4) - 5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)} = 0$$

Đặt: $u = \sqrt{x^2-4x-5}, v = \sqrt{x+4}$. Ta được: $2u^2 + 3v^2 - 5uv = 0 \Leftrightarrow (2u-3v)(u+v) = 0$

Ví dụ 20: Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2(1-x)}$$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt[4]{x} \\ v = \sqrt[4]{1-x} \end{cases} (u \geq 0, v \geq 0, u^4 + v^4 = 1).$$

Ta được: $u^2 + uv^2 + v^3 = v^2 + u^3 + u^2v \Leftrightarrow (u+v)(u-v)(1-u-v) = 0$

Giải hai trường hợp:

$$\begin{matrix} * & u = v & * & \begin{cases} u+v=1 \\ u^4+v^4=1 \end{cases} \end{matrix}$$

IV/ Phương pháp dùng ẩn phụ đưa về hệ.

1/ Dùng một ẩn phụ:

Ví dụ 21: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$

Gợi ý lời giải: Điều kiện: . Đặt $t = \sqrt{x+5}, t \geq 0$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + t = 5 \\ t^2 - x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t = 5 \\ x^2 - t^2 + t + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + t = 5 \\ (x-t+1)(t+x) = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 22: Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1)

Gợi ý lời giải: Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + t = 5 \\ t^2 - x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ x^3 - t^3 + 2(x-t) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ (x-t)(x^2 + t^2 + xt + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ (x-t) = 0 \vee \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ x^2 + t^2 + xt + 2 = 0 \end{cases} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x + 1 = 0 \\ (x+t)^2 + x^2 + t^2 + 4 = 0 (vn) \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 23: Giải phương trình: $x = 2012 + \sqrt{2012 + \sqrt{x}}$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $t = 2012 + \sqrt{x}$, $t \geq 2012$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} t = 2012 + \sqrt{x} \\ x = 2012 + \sqrt{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2012 + \sqrt{x} \\ t - x = \sqrt{x} - \sqrt{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2012 + \sqrt{x} \\ (\sqrt{t} - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{t} + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2012 + \sqrt{x} \\ t = x \end{cases} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2012 = 0$$

Ví dụ 24: Giải phương trình: $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq 1/2$.

(Chọn ẩn phụ từ việc làm ngược).

Đặt $\sqrt{2x-1} = ay + b$. Tìm a, b để hệ
$$\begin{cases} x^2 - 2x = 2(ay + b) \\ (ay + b)^2 = 2x - 1 \end{cases}$$
 là hệ đối xứng!!!

Lấy $a = 1$; $b = -1$, ta được hệ:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 2(y-1) \\ y^2 - 2y = 2(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2(y-1) \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \left(x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1 \right)$$

Giải ra được $x = y = 2 \pm \sqrt{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm duy nhất của phương trình: $x = 2 + \sqrt{2}$

2/ Dùng hai ẩn phụ:

Ví dụ 25: Giải phương trình: $\sqrt[4]{57-x} + \sqrt[4]{x+40} = 5$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $-40 \leq x \leq 57$. Đặt:
$$\begin{cases} u = \sqrt[4]{57-x} \\ v = \sqrt[4]{x+40} \end{cases}$$
 Ta được hệ phương trình:

trình:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ [(u+v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 = 97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ 2(uv)^2 - 10uv + 528 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \\ uv = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \\ u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \quad \text{Suy ra kết quả.}$$

Ví dụ 26: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - \frac{7}{4}\sqrt{x} + 1} = (1 - \sqrt{x})^2$ (1)

Gợi ý lời giải: Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = 1 - \sqrt{x} \end{cases}$. Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 - v^4 = \frac{7}{4}u - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 - (1-u)^4 = \frac{7}{4}u - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 - (1-u)^4 = \frac{7}{4}u - 1 (*) \end{cases}$$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow u(4u - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \rightarrow x = 0 \\ u = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{9}{16} \end{cases}$.

Nhận xét: Việc dùng ẩn phụ để giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình là phương pháp phổ biến, được sử dụng rộng rãi. Tuy nhiên đặt ẩn phụ như thế nào để có thể giải quyết được vấn đề, tùy thuộc vào sự quan sát nhạy bén, khéo léo, linh hoạt của mỗi người.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

- 1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = \log_2(1 + \sqrt{3}) \\ y = 1 - \log_2(1 + \sqrt{3}) \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3^{-x} - 3^{-y} = \frac{8}{9} \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x - y = 10 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 2 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 5 + \sqrt{31} \\ y = \sqrt{31} - 5 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ \log_3(x + y) - \log_2(x - y) = 1 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x + \log_3 y = 3 \\ (-2y^2 - y + 12).3^x = 81y \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} 4^{\frac{x+y}{y} \cdot x} = 32 \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y) \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_2 \frac{3y}{2} \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} \log^2 x = \log^2 y + \log^2(xy) \\ \log^2(x - y) + \log x \cdot \log y = 0 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} \ln(1 + x) - \ln(1 + y) = x - y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
- 11) $\begin{cases} 2.2^x + 3.3^y = 19 \\ 2^x - 3^y = 2 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = \log_2 5 \\ y = 1 \end{cases}$
- 12) $\begin{cases} 3^x + 4^{x+y} = 7 \\ 3^{x-1} \cdot 4^{x+y} = 2 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \log_4 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \log_3 6 \\ y = -\log_3 6 \end{cases}$
- 13) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x + y) - \log_3(2x - y) = 1 \end{cases}$ ĐS: $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

C.BÀI TẬP BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LOGARIT, VÔ TỈ.

1/ Giải các bất phương trình:

a/ $(\sqrt[3]{2})^{x^2-6x-4} - (\sqrt{3+\sqrt{8}}-1)^x \geq 0$ b/ $15^{2x+4} - 3^{3x} \cdot 5^{4x-4} < 0$ c/ $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} \geq 100$

d/ $2^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} \geq 3^{2x^2-6x+3}$ e/ $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} < 6$ g/ $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$

h/ $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$ i/ $\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x+1}} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{\sqrt{3-x}+1} > 5$.

(**Đáp số:** a/ $(-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [8; +\infty)$ b/ $(4; +\infty)$ c/ $(-1; \frac{-1}{\log 5}] \cup [2; +\infty)$

d/ $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ e/ $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \frac{3}{2})$ g/ $(-\infty; 2]$ h/ $[\log_5 7; 2]$ i/ $[-1; 3)$

[-1; 3))

2/ Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc R: $m \cdot 4^x + (m-1) 2^{x+2} + m-1 > 0$.

(**Đáp số:** $m \geq 1$)

3/ Tìm m để bất phương trình: $m \cdot 9^x - (2m+1) \cdot 6^x + m \cdot 4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0; 1]$.

(**Đáp số:** $m \leq 6$)

4/ Tìm m để bất phương trình: $4^{x^2} + 2(2m+1)2^{x^2} + 4m^2 - 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc R:

(**Đáp số:** $m < -$

1 hoặc $m > 0$)

5/ Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc R sao cho $|x| \geq \frac{1}{2}$:

$m \cdot 9^{2x^2-x} - (2m+1)6^{2x^2-x} + m \cdot 4^{2x^2-x} \leq 0$ (**Đáp số:** $m \leq 0$)

6/ Giải các bất phương trình:

a/ $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x > 6^x - 1$ b/ $\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} + 3 > 3x \cdot 5^{-x} \cdot \sqrt{-2x^2 + 5x + 3} + 9x \cdot 5^{-x}$
c/ $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0$ d/ $\frac{2^{1-x} + 1 - 2x}{2^x - 1} \leq 0$

(**Đáp số:** Dựa vào tính đơn điệu của h/số. a/ $x < 2$; b/ $x \in [-\frac{1}{2}; 3]$; c/ $x \in (\frac{1}{2}; 2]$;

d/ $0 < x \leq 1$)

7/ Giải các bất phương trình:

a/ $\log_3 [(x+2)(x+4)] + \log_{\frac{1}{3}} (x+2) < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 7$ b/

$\sqrt{1 - 9 \log_{\frac{1}{8}}^2 x} > 1 - 4 \log_{\frac{1}{8}} x$

c/ $\log_2^2 (-x^2 + x + 2) + 3 \log_{\frac{1}{2}} (-x^2 + x + 2) + 2 \leq 0$ d/ $\log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$

e/ $\frac{1}{4} x^{\frac{1}{2} \log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4} \log_2^2 x}$ g/ $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$

(**Đáp số:** a/ $-2 < x < 3$ b/ $x \in [\frac{1}{2}; 1)$ c/ $x \in [0; 1]$ d/ $x = 2$ hoặc $0 < x < 4/5$

e/ $x \in (0; 2^{-2\sqrt{2}}) \cup [2^{2\sqrt{2}}; +\infty)$ g/ $x \in [\frac{1}{6}; 6]$

8/ Giải các bất phương trình:

a/ $\log_{\frac{1}{2}} [\log_2 (\log_{x-1} 9)] > 0$ b/ $\log_x [\log_3 (9^x - 72)] \leq 1$ c/ $\log_{8x^2 - \frac{1}{2}} \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 0$

(**Đáp số:** a/ $(4; 10)$ b/ $(\log_9 73; 2]$ c/ $\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$

9/ a/ Giải bất phương trình: $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$ (1)

b/ Tìm m để mọi nghiệm của bpt (1) cũng là nghiệm của bất phương trình:

$1 + \log_5 (x^2 + 1) + \log_{\frac{1}{5}} (x^2 + 4x + 2m) > 0$ (2)

(**Đáp số:** a/ $1 < x < 4$ b/ Tìm m để (2) đúng với mọi x thuộc

$(1; 4)$. $m \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right)$)

10/ Giải các bất phương trình:

a/ $\log_5 (1 + \sqrt{x}) > \log_{16} x$ b/ $\log_5 x > \log 7(x+2)$ c/

$\log_5 (1 + \sqrt{4x}) > \log_{16} 4x$

(**Đáp số:** a/ Đặt $u = \log_{16} x$, ta được: $1 + 4^u > 5^u$. KQ: $0 < x < 16$ b/ $x > 5$

c/ $0 < x < 4$)

11/ Giải các bất phương trình:

a/ $\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1$ b/ $\ln \left| \frac{x+1}{2} \right| - \ln (x^2 - x + 1) > 0$

c/ $(x^2 - 3x) \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$ d/

$\log_5 (4^x + 144) - 4 \log_5 2 < 1 + \log_5 (2^{x-2} + 1)$

(**Đáp số:** a/ $1 < x \leq 2$ b/ $\frac{1}{2} < x < 1$ c/ $x \leq \frac{1}{2}$ hoặc $x \geq 3$

d/ $2 < x < 4$)

12/ Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn: $\log_2 (x^2 + 2x + 3)^{y^2+8} \leq 7 - y^2 + 3y$

(**Đáp số:** $x = -1; y = 1$)

13/ Giải các bất phương trình:

a/ $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - x^2 - 2x$ b/

$(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$

c/ $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 3} < \sqrt{2x^2 - 4x - 2}$ d/

$\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \geq x^2 - 8x + 18$

e/ $x^3 + x^2 + 3x\sqrt{x+1} + 2 > 0$ g/

$x(x-4)\sqrt{-x^2 + 4x} + (x-2)^2 < 2$

(**Đáp số:** a/ $x \geq 1$ hoặc $x \leq -3$ b/ $-9 < x < 4$ c/ $\emptyset$

$$\begin{array}{l} d/ x = 4 \\ x \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}) \end{array}$$

$$e/ x \geq -1$$

$$g/$$

14/ Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{(x+4)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[-4;6]$

(**Đáp số:** $m \geq 6$)

15/ Tìm m để bất phương trình: $(x^2 + 1)^2 + m \leq x\sqrt{x^2 + 2} + 4$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$

(**Đáp số:** $m \leq \sqrt{3}$)

16/ Giải các bất phương trình:

$$a/ |x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20$$

$$b/ |x^2 + 6x + 8| \leq -x^2 - 6x - 8$$

$$c/ |x^2 - 2x - 3| \leq 3x - 3$$

$$d/ |x - 6| \leq x^2 - 5x + 9$$

$$e/ |x^2 - 6x + 8| < 5x - x^2 \quad g/$$

$$|x^2 - 2x - 8| > 2x$$

$$h/ |x^3 - 1| > 1 - x$$

$$i/ |5 - x| < |2 - x| + |2x - 7| \quad k/$$

$$|x + 3| < 3 + |x|$$

(**Đáp số:** $a/ (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$

$b/ [-4; 2]$

$c/ [2; 5]$

$d/ (-$

$\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

$$e/ \left(\frac{11 - \sqrt{57}}{4}; \frac{11 + \sqrt{57}}{4} \right)$$

$$g/ (-\infty; 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{3}; +\infty)$$

$$h/ (-\infty; -$$

$$1) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$i/ (-\infty; 2) \cup (7/2; +\infty)$$

$$k/ (-\infty; 0).)$$

17/ Tìm m để bất phương trình: $x^2 + 2|x - m| - 2mx + m^2 + m - 1 \leq 0$ có nghiệm. (**Đáp số:** $m \leq 1$)

18/ Tìm m để bpt: $x^2 + 2|m - x| - 2mx + 2 > 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc R. (**Đáp số:** $|m| \leq \sqrt{2}$)

19/ Tìm m để bất phương trình $\left| \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$ nghiệm đúng với mọi x thuộc R. (**Đáp số:** $-5 < m < 1$)

20/ Tìm m để bpt $\left| \frac{3x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 1} \right| \geq 2$ nghiệm đúng với mọi x thuộc R.

$$(\text{Đáp số: } m \in \left[\frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}; \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2} \right])$$

MỘT SỐ BÀI TẬP ÔN LUYỆN PHẦN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Giải các hệ phương trình sau:

$$1/. \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$$

$$2/. \begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x - 3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$$

$$3/. \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$4/. \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$

$$5/. \begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x^2} = 49 \end{cases}$$

$$6/. \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$$

$$7/. \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

$$8/. \begin{cases} 17x^2 - 34y - 4x^3y + 8xy^2 + xy = 4 \\ x^4 + 4y^2 + xy - 4x^2y = 4 \end{cases}$$

$$9/. \begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$$

$$10/. \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

$$11/. \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

$$12/. \begin{cases} xy(2x + y - 6) + 2x + y = 0 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 = 8 \end{cases}$$

$$13/. \begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ xy + \frac{1}{xy} = 4 \end{cases}$$

$$14/. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x + 5} + \sqrt{y + 5} = 6 \end{cases}$$

$$15/. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x + 5} + \sqrt{y + 5} = 8 \end{cases}$$

$$16/. \begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 4 \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 4 \end{cases}$$

$$17/ \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = \frac{2}{3} \\ (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 6 \end{cases}$$

$$18/ \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2 + x \end{cases}$$

$$19/ \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 6 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2 = 18 \end{cases}$$

$$20/ \begin{cases} x(x+1) + \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}+1\right) = 4 \\ x^3y^3 + xy + x^2y^2 + 1 = 4y^3 \end{cases}$$

$$21/ \begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4 \\ x = 2y^3 - 6y - 2 \end{cases}$$

$$22/ \begin{cases} (x+2y)^2 + \frac{1}{(2x-y)^2} = 10 \\ \frac{x+2y}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

$$23/ \begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2-y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x+y + \frac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

$$24/ \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

$$25/ \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 6 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2 = 18 \end{cases}$$

$$26/ \begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y(1) \\ x^8 + y^4 = 1(2) \end{cases}$$

$$27/ \begin{cases} 2x^2y^2 + x^2 + 2x = 2 \\ 2x^2y - x^2y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

$$28/ \begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$29/ \begin{cases} y^2 = (x+8)(x^2+2) \\ y^2 - (4x+8)y + 16 + 16x - 5x^2 = 0 \end{cases}$$

$$30/ \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$$

$$31/ \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

$$32/ \begin{cases} \sqrt{3+x^2} + 2\sqrt{x} = 3 + \sqrt{y} \\ \sqrt{3+y^2} + 2\sqrt{y} = 3 + \sqrt{x} \end{cases}$$

$$33/ \begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 \end{cases}$$

$$34/ \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-7} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-7} = 4 \end{cases}$$

$$35/ \begin{cases} \sqrt{x+9} + \sqrt{y-7} = 4 \\ \sqrt{y+9} + \sqrt{x-7} = 4 \end{cases}$$

$$36/ \begin{cases} x^3 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 3z^3 + x = 9z + 8 \end{cases}$$

$$37/ \begin{cases} (4x+2)^2 = 2y+15 \\ (4y+2)^2 = 2x+15 \end{cases}$$

$$38/ \begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 8xy^3 + 2y^3 + 1 \geq 4x^2 + 2\sqrt{1 + (2x-y)^2} \end{cases}$$

$$39/ \begin{cases} x + y + (z^2 - 8z + 14)\sqrt{x+y-2} = 1 \\ 2x + 5y + \sqrt{xy+z} = 3 \end{cases}$$

$$40/ \begin{cases} 2x + 2y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1} = 4 \end{cases}$$

$$41/ \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = y \\ x^4 - y^4 = 144 \end{cases}$$

$$42/ \begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1(1) \\ xy + x + 1 = x^2(2) \end{cases}$$

$$43/ \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2(1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y(2) \end{cases}$$

$$44/ \begin{cases} \frac{y^2+1}{y} = \frac{x^2+1}{x}(1) \\ x^2 + 3y^2 = 4(2) \end{cases}$$

$$45/ \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$$

$$46/ \begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x)(1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0(2) \end{cases}$$

$$47/ \begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y(1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y(2) \end{cases} \quad 48/ \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$